

11/5/17

Ισομετρία του $\mathbb{R}^n$, $n=2,3$

Είναι καθε απεικόνιση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ η οποία διατηρεί ~~την~~ την Ευκλείδεια απεικόνιση, δηλ.
 $d(f(p), f(q)) = d(p, q)$, $p, q \in \mathbb{R}^n$

Γεωμετρικές ισομετρίες

Ορισμός: Δύο σήματα Σ, Σ' (υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$) καλούνται γεωμετρικά ~~ισομετρικά~~ ισομετρικά αν υπάρχει f ισομετρία του $\mathbb{R}^n$ τ.ω $f(\Sigma) = \Sigma'$.

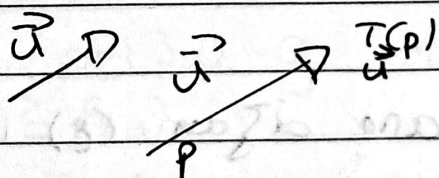
Παραδείγματα ισομετριών του $\mathbb{R}^2$

1) Παράλληλες μεταφορές

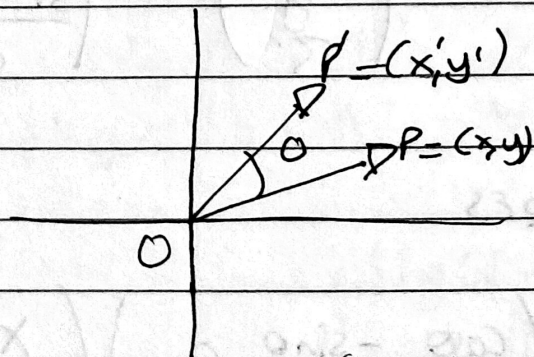
$$\vec{u} = (u_1, u_2)$$

$$T_{\vec{u}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T_{\vec{u}}(p) = p + \vec{u}, \quad p = (x, y)$$



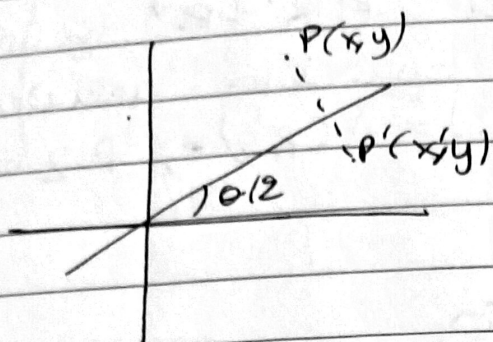
2) Στροφές Δίνεται μια θ ~~και~~ $R_{\theta}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3) Κατοπτρισμός
 $KO: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Παραδείγματα ισομετριών του $\mathbb{R}^3$

1) Παραλληλές μεταφορές

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$T_{\vec{u}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T_{\vec{u}}(P) = P + \vec{u}, P = (x, y, z)$$

$$\vec{u} \nearrow \vec{u} \nearrow T_{\vec{u}}(P) = (x + u_1, y + u_2, z + u_3)$$

2) Στροφές γύρω από άξον (ε) κατά γωνία θ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3) Ψευδοστροφές

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Για $\theta = 0$ είναι ο κατοπτρισμός ως προς Oxy

$$\mathbb{R}^{n \times 3}, \langle \cdot, \cdot \rangle$$

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

$$w = (w_1, w_2, w_3)$$

$$\langle u, w \rangle = u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3$$

$$d(p, z) = \|p - z\| = \sqrt{\langle p - z, p - z \rangle}$$

Ορισμός: Μια απεικόνιση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

καλείται γραμμική ισομετρία $\Leftrightarrow$ είναι γραμμική και διαφέρει το $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $\langle f(u), f(w) \rangle = \langle u, w \rangle$.

Πρόταση: Μια γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

είναι γραμμική ισομετρία αν v ο πίνακας της

A ως προς ορθονομαδικά βάζα του $\mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνιος

$$\text{δηλ } A^{-1} = A^T$$

Θεώρημα (Τα αξιώματα των ισομετρίων του $\mathbb{R}^n$)

κάθε ισομετρία $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ γράφεται ως

$f = T_{\vec{u}} \circ g$ όπου $T_{\vec{u}}$ είναι παραλληλίστη μεταφορά και g ~~απεικόνιση~~ γραμμική ισομετρία

Απόδειξη: ορίσω g τω $g = T_{-\vec{u}} \circ f$

όπου $\vec{u} = f(0)$

Επειδή $T_{-\vec{u}}$ και f είναι ισομετρίες η g είναι ισομετρία δηλαδή $\|g(x), g(y)\| = \|x, y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$g(0) = T_{-\vec{u}}(f(0)) = f(0) - \vec{u} = f(0) - f(0) = 0$$

$$\text{για } y=0, \quad \langle g(x), g(0) \rangle = \langle x, 0 \rangle$$

$$\Leftrightarrow \|g(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$



$$\|g(x) - g(y)\|^2 = \|x - y\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\|g(x)\|^2 - 2\langle g(x), g(y) \rangle +$$

$$\|g(y)\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\Leftrightarrow \langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Μένει ν.δ.ο η g είναι γραμμική

Έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$ ο ο. βάσις του $\mathbb{R}^n$, οπότε

$$\langle v_i, \langle e_i, e_j \rangle \rangle = v_j$$

$$(*) \Rightarrow \langle g(e_i), g(e_j) \rangle = \delta_{ij} \Rightarrow \{g(e_1) \dots g(e_n)\}_{\text{orth}}$$

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Zeilen

$$x = \sum \langle x, e_i \rangle e_i$$

$$g(x) = \sum_i \langle g(x), g(e_i) \rangle g(e_i)$$

$$g(x) = \sum_i \langle x, e_i \rangle g(e_i)$$

$$\begin{cases} g(x+y) = \sum_i \langle x+y, e_i \rangle g(e_i) = g(x) + g(y) \\ g(\lambda x) = \sum_i \langle \lambda x, e_i \rangle g(e_i) = \lambda g(x) \end{cases}$$

Program: Ol mact exz qdcpwran Nivauds
Enam zus mapens

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & +\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Πρώτοι : Οι πρώτες γραμμές ισχυρίζονται
τα R^2 είναι σπέρμα και κελτότυπος

Πρόταση: Κάθε ισομετρία f του $\mathbb{R}^2$ είναι
της μορφής $f = T \circ g$, όπου g είναι
απεικόνιση μετατόπισης.

Συνθεση οξυγenu με υατογονιου ενος $\rightarrow$ υατογονιου ενος
 Σ υατογον $\rightarrow$ οξυγονου

Πρόταση: Οι μόνες γραμμικές ισομετρίες του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικές απεικονίσεις μ' n τιμές της μορφής:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \quad \text{ως προς κατάλληλη ορθοκανονική βάση.}$$

Πρόταση: Κάθε ισομετρία f του $\mathbb{R}^3$ είναι της μορφής $f = T \circ g$, όπου g είναι στροφή ως προς άξονα ή ψευδοστροφή.

Γεωμετρική ισοτιμία

Το $\Sigma' \subset \mathbb{R}^3$ καλείται γεωμετρικός ισοτικός με το $\Sigma \in \mathbb{R}^n$ αν υπάρχει $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ισομετρία ώστε $f(\Sigma) = \Sigma'$.

ο Ανακλαστική: Κάθε Σ είναι γεωμετρικός ισοτικός με το Σ αφού $\Sigma = I \downarrow (\Sigma)$

$I \downarrow: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I \downarrow(p) = p$ ισομετρία

ο Συμμετρική: Αν Σ γεωμετρικός ισοτικός του Σ' τότε και Σ' γεωμ. ισοτικός του Σ .

ο Μεταβατικότητα: Αν Σ γεωμ. ισοτικός με Σ' και Σ' γεωμ. ισοτικός με Σ'' , τότε Σ γεωμ. ισοτικός με Σ'' .

Απόδειξη: $\Sigma' = f(\Sigma)$, $\Sigma'' = g(\Sigma')$ όπου f, g ισομετρίες του $\mathbb{R}^n$. Παρακάτω $\Sigma'' = g(f(\Sigma)) = (g \circ f)(\Sigma)$ και $g \circ f$ είναι ισομετρία.

Suppose $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ to define
the isomorphism to $\mathbb{R}^n$
 $(f, g) \mapsto g \circ f$

• $\text{Isom}(\mathbb{R}^n) \times \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$

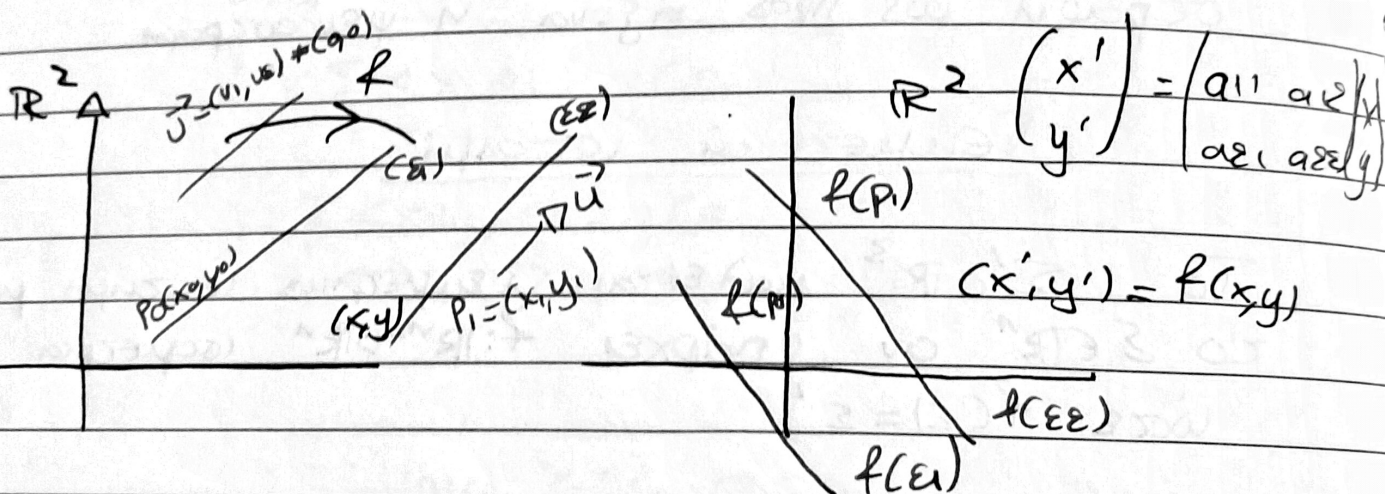
$f \circ \text{Id} = \text{Id} \circ f = f$

$f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n), f^{-1} \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$

$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \text{Id}$

$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

Now $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametric representation

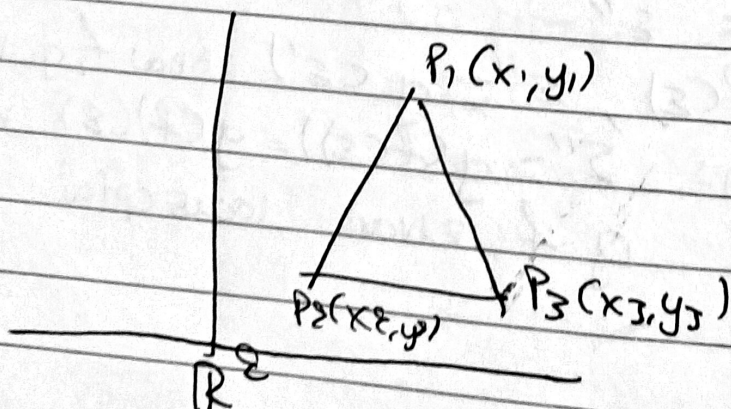


Parametric equation for f

$(\epsilon): (x, y) = (x_0, y_0) + \epsilon (u_1, u_2)$

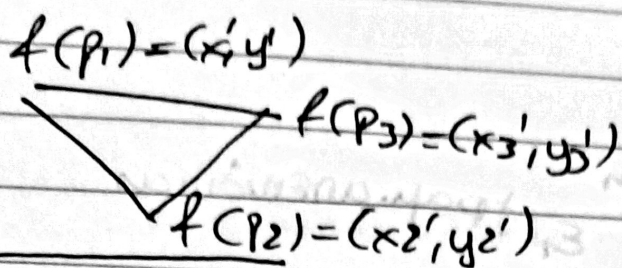
$f(\epsilon): f(x, y) = f(x_0, y_0) + \epsilon f(\vec{u})$

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



$f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

x_1	y_1	1
x_2	y_2	1
x_3	y_3	1



$$E' = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \left| \begin{array}{cc|c} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{array} \right| \quad E' = \text{Idet} E$$